O wariacyjnym sformułowaniu regularyzacji Tichonowa

Marek Andrzej Kojdecki

Instytut Matematyki i Kryptologii, Wydział Cybernetyki, Wojskowa Akademia Techniczna

Seminarium *Matematyczne Metody Techniki* w Instytucie Matematycznym PAN
Warszawa, ulica Śniadeckich 8, sala 405, wtorek 18 października 2016 roku, godzina 11:15

W referacie omówię wariacyjne sformułowanie regularyzacji Tichonowa, z najważniejszymi określeniami i twierdzeniami.

Niech U i F będą przestrzeniami Hilberta i niech dla *liniowego równania operatorowego pierwszego rodzaju* z danymi dokładnymi (A,f): $Au = f$, $A \in L(U,F)$, $f \in F$, $u \in U$ istnieje *rozwiązanie uogólnione*: $u_+ \equiv \arg\inf\{\|y\|:\ y \in \arg\inf\{\|Aw - f\|:\ w \in U\}\}$. Równanie to byłoby *poprawnie postawione*, gdyby dla każdej pary danych istniało dokładnie jedno rozwiązanie zależne w sposób ciągły od danych; w ogólności jest *niepoprawnie postawione*, bo może się zdarzyć, że $\operatorname{im} A \neq F$ lub $\ker A \neq \{0\}$ lub $\|A^{-1}\| = \infty$. Do przybliżonego rozwiązywania takich zagadnień, gdy zamiast danych dokładnych znane są tylko *dane przybliżone* (A_η, f_δ), $A_\eta \in L(U,F)$, $f_\delta \in F$, wraz z oszacowaniem *błędów danych* $\gamma \equiv (\eta,\delta)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|A_\eta\| > \eta$, $\|f_\delta\| > \delta$, można zastosować *regularyzację Tichonowa* (А.Н. Тихонов, 1963), która polega na zastąpieniu równania operatorowego zagadnieniem wariacyjnym (tu bez ograniczeń): $u_{\alpha\gamma} \equiv \arg\inf\{\|A_\eta u - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2:\ u \in U\}$ z *parametrem regularyzacji* $\alpha > 0$. Udowodniono, że $u_{\alpha\gamma} \xrightarrow[\gamma \to 0]{} u_+$ o ile parametr regularyzacji wybiera się tak, by przy $\gamma \to 0$ jednocześnie $\alpha(\gamma) \to 0$ i $\dfrac{(\eta+\delta)^2}{\alpha(\gamma)} \to 0$. Odwzorowanie regularyzujące otrzymuje się także, gdy parametr α wybiera się według *zasady uogólnionego uchybu* – jako (razem z rozwiązaniem zregularyzowanym $u_{\alpha\gamma}$) – rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} u_{\alpha\gamma} = \arg\inf\{\|A_\eta u_{\alpha\gamma} - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_{\alpha\gamma}\|^2 :\ u \in U\} \\ \|A_\eta u_{\alpha\gamma} - f_\delta\|^2 = (\eta\|u_{\alpha\gamma}\| + \delta)^2 + [\mu_\gamma^\kappa(f_\delta, A_\eta)]^2 \end{cases},$$
gdzie $\mu_\gamma^\kappa(f_\delta, A_\eta)$ jest oszacowaniem $\mu_\gamma(f_\delta, A_\eta) \le \mu_\gamma^\kappa(f_\delta, A_\eta) \le \mu_\gamma(f_\delta, A_\eta) + \kappa$ *minimalnego uchybu* $\mu_\gamma(f_\delta, A_\eta) \equiv \inf\{\|A_\eta u - f_\delta\|:\ u \in U\}$ dla równania z zaburzonymi danymi (A_η, f_δ), przy czym $\kappa \xrightarrow[\gamma \to 0]{} 0$.