Wrocław, 26 maja 2022

dr hab. Anna Wysoczańska-Kula
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Jacka Krajczoka pt. *Modular properties of locally compact quantum groups*

Rozprawa doktorska mgra Jacka Krajczoka liczy 134 strony i składa się z dwóch rozdziałów wstępnych, czterech rozdziałów stanowiących zasadniczą treść pracy oraz dodatku. Dysertacja jest napisana w języku angielskim z Wprowadzeniem w polskiej i angielskiej wersji językowej. Rozprawa dotyczy własności modularnych lokalnie zwartych grup kwantowych, ze szczególnym uwzględnieniem rodziny grup typu I. Grupy typu I charakteryzują się 'dobrą' teorią reprezentacji, o podobnych własnościach jak zwarte grupy kwantowe.

1. Zawartość pracy

Dwa pierwsze rozdziały zawierają krótkie ustalenie stosowanych oznaczeń oraz wprowadzenie do teorii algebr von Neumanna, wag (*weights*) i teorii zwartych i lokalnie zwartych grup kwantowych. Doktorant wprowadza wiele obiektów, które są niezbędne w dalszej części pracy.

Rodział trzeci, pierwszy rozdział zawierający nowe wyniki, poświęcony jest opisowi własności modularnych lokalnie zwartych grup kwantowych typu I. Dla tej rodziny P. Desmedt (w pracy doktorskiej [31][1]) udowodnił twierdzenie o istnieniu analogu miary Plancherela na przestrzeni nieprzywiedlnych reprezentacji grupy kwantowej $\mathbb{G}$. Wraz z miarą Plancherela otrzymujemy stowarzyszone obiekty, w szczególności operatory unitarne $\mathcal{Q}_L, \mathcal{Q}_R : L^2(\mathbb{G}) \to \int_{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}^{\oplus} \mathrm{HS}(H_\pi) d\mu(\pi)$ działające w całkę prostą przestrzeni operatorów Hilberta-Schimdta oraz mierzalne pola ściśle dodatnich samosprzężonych operatorów $(D_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$, $(E_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$. Pozwalają one wyrazić prawą i lewą całkę Haara na $\mathbb{G}$. Doktorant przytacza dowód twierdzenia Desmedta (za pracą [31]) oraz udowadnia wynik o pewnej jednoznaczności miary Plancherela (Proposition 3.5). Wynik ten pozwala w dalszej części pracy stwierdzać, że zadane obiekty są faktycznie obiektami z twierdzenia Desmedta. Zasadniczymi wynikami tego rozdziału są charakteryzacje za pomocą operatorów $\mathcal{Q}_L$, $\mathcal{Q}_R$, $(D_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$, $(E_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$ różnych obiektów modularnych na $\mathbb{G}$ i $\hat{\mathbb{G}}$: sprzężeń modularnych $J_{\hat{\varphi}}, J_{\hat{\psi}}$, grup modularnych $(\sigma_t^{\varphi})_{t\in\mathbb{R}}, (\sigma_t^{\psi})_{t\in\mathbb{R}}$ oraz rozkładu polarnego operatora $T' : \Lambda_\psi(x) \mapsto \Lambda_\varphi(x^*)$ i elementu modularnego $\hat{\delta}$ na $\hat{\mathbb{G}}$. Następnie, korzystając z tych wyników, Doktorant opisuje sieć zależności między takimi właściwościami jak unimodularność $\mathbb{G}$ lub jej dualnej $\hat{G}$ lub śladowość całek Haara na $\mathbb{G}$. Ten rozdział zamyka lista przykładów: operatory $\mathcal{Q}_L, \mathcal{Q}_R, (D_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}, (E_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$ są konkretnie wyznaczone dla zwartych grup kwantowych, dla klasycznych (*second-countable*) lokalnie zwartych group kwantowych, dla $\widehat{SU_q(2)}$ oraz dla kwantowej grupy $az+b$.

Wyniki tego rozdziału pochodzą z pracy [49] (opublikowanej w Journal of Operator Theory) oraz [50] (Dissertationes Mathematicae). Dowody wymagają subtelnych i technicznych rozumowań na algebrach von Neumanna i całkach prostych przestrzeni Hilberta oraz biegłego posługiwania się różnymi operatorami modularnymi. Bardzo cenne są opisane tutaj konkretne

[1] Odnośniki zgodne z rozprawą doktorską

przykłady. Jako pewien mankament wskazałabym pojawienie się operatorów $D, E, \mathcal{Q}_R, \mathcal{Q}_L$ dla poszczególnych przykładów bez jakichkolwiek wskazówek, skąd pochodzą pomysły na nie.

Rozdział czwarty rozprawy doktorskiej poświęcony jest odpowiedzi na pytanie: czy kwantowy dysk jest grupą kwantową? Kwantowy dysk (uniwersalna algebra C* z jedynką, generowana przez element s spełniający równanie $ss^* - qs^*s = (1-q)1$) to stosunkowo prosty przykład przestrzeni nieprzemiennej, często traktowany jako poligon doświadczalny do badania różnych ogólnych koncepcji nieprzemiennej matematyki. Pytanie o jego potencjalną strukturę grupy kwantowej było więc naturalne. Doktorant pokazuje w rozprawie, że badany obiekt nie jest grupą kwantową. W tym celu najpierw wyprowadza wniosek, że ewentualna struktura grupowa $\mathbb{G}$ musi być typu Kaca, a następnie korzystając z wyników z poprzedniego rozdziału wykazuje własność przeciwną.

Wyniki zawarte w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [51]. Są ciekawe i dobrze umotywowane. Dowody wymagają pomysłowości i dużej biegłości. Warto zwrócić uwagę, że problem istnienia struktury grupowej na kwantowym dysku był już wcześniej atakowany przez Promotora doktoratu (P. Sołtan, When is a quantum space not a group?, BCP 91, 2010), gdzie została sformułowana poprawna hipoteza oraz pewna sugestia kierunku poszukiwania dowodu. Doktorant nie podążył tą drogą, tylko zaproponował zupełnie inne rozwiązanie.

W mojej ocenie złożoność rozumowań przedstawionych w rozdziale 3 i 4 sprawia, że wyniki te mogłyby stanowić samodzielną rozprawę doktorską.

W rozdziale piątym Doktorant bada, czy algebra von Neumanna $\mathcal{C}_{\mathbb{G}} = \{\chi_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})\}''$ generowana przez charaktery danej zwartej grupy kwantowej $\mathbb{G}$ jest maksymalną abelową podalgebrą (MASA) w $L^\infty(\mathbb{G})$. Freslon i Vergnioux pokazali, że tak jest dla grupy O_N^+, ale przypadek O_F^+ dla $F \neq I$ pozostawał otwarty. W rozprawie zostało pokazane między innymi, że:

(1) algebra $\mathcal{C}_{SU_q(2)}$ nie jest MASA w $L^\infty(SU_q(2))$, ale jest MASA w $L^\infty(SU_q(2))^\tau$;
(2) algebry $\mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ dla $\mathbb{G} = O_F^+$ $(F \neq I)$ oraz $\mathbb{G}_A = \mathbb{G}_{\mathrm{Aut}}(B, \psi)$, gdy $\mathbb{G}_A$ nie jest typu Kaca, nie są MASA;
(3) algebry $\mathcal{C}_{U_F^+}$ nie są MASA, gdy $\frac{\dim(U)}{\dim_q(U)} \leq \frac{1}{15}$ (U oznacza fundamentalną reprezentację grupy $\mathbb{G} = U_F^+$).

Dowody faktu (1) opierają się na opisaniu algebr $L^\infty(SU_q(2))$, $\mathcal{C}_{SU_q(2)}$ oraz $\mathcal{C}'_{SU_q(2)} \cap L^\infty(SU_q(2))$ za pomocą języka całek prostych przestrzeni Hilberta, z wykorzystaniem operatora $\mathcal{Q}_L$ z Rodziału 3.

W dowodach własności (2) i (3) zasadniczą rolę odgrywa Twierdzenie 5.9: sumowalność szeregu $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \big(\frac{\dim(\alpha)}{\dim_q(\alpha)}\big)^{\frac{1}{2}}$ implikuje, że zawieranie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}} \subset L^\infty(\mathbb{G})$ jest quasi-splitem. Natomiast w Twierdzeniu 5.12 Doktorant udowadnia, że quasi-split $\mathcal{C}_{\mathbb{G}} \subset L^\infty(\mathbb{G})$ przy dodatkowym założeniu o nietrywialności funkcjonałów Woronowicza na $\mathbb{G}$ implikuje, że $\mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ nie jest MASA. Zastosowanie tych twierdzeń do wyników (2) i (3) wymaga znalezienia odpowiednich oszacowań na wartości $\frac{\dim(\alpha)}{\dim_q(\alpha)}$ dla $\alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$. Zwłaszcza w przypadku (3) Doktorant wykazuje się dużą wytrwałością i pomysłowością, aby osiągnąć ten cel. Wybraną w pracy stałą $\frac{1}{15}$ można na bazie tych samych rachunków poprawić do 0.07 (dla $t \in (0, 0.07)$ mamy $\sqrt{2t}(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} f(h(t))) < 0.49993$).

Prezentowane w tym rozdziale wyniki stanowią treść pracy [52], na razie dostępnej tylko w bazie arXiv. Opisywane rezultaty stanowią naturalną kontynuację badań prowadonych przez innych matematyków. Są one bardzo ciekawe i pomysłowe, a jednocześnie wymagają powiązania ze sobą bardzo różnych obiektów matematycznych. Wyniki te są w dużej mierze niezależne od wcześniejszych części rozprawy (tylko w części dotyczącej grupy $SU_q(2)$ Doktorant korzysta z wyników Rozdziału 3), ale wskazują, że modularne własności rozpatrywanych grup kwantowych mają istotny wpływ na charakter algebry $\mathcal{C}_{\mathbb{G}}$.

Ostatni rozdział rozprawy poświęcony jest badaniom zależności między średniowalnością dyskretnych grup kwantowych i własnościami typu nuklearność/injektywność algebr operatorowych ich grup dualnych. Bedos i Tuset pokazali, że dla średniowalnych (*amenable*) lokalnie zwartych grup kwantowych algebra C* $C_0(\hat{\mathbb{G}})$ jest nuklearna, a algebra von Neumanna $L^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ jest injektywna. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa nawet dla grup klasycznych. Doktorant w swojej rozprawie zastanawia się, do jakiego stopnia można wspomnianą implikację odwrócić. Znajduje warunek wzmacniający własność w*-CPAP algebry $L^\infty(\hat{\mathbb{G}})$, który okazuje się równoważny średniowalności grupy $\mathbb{G}$. Udowadnia też, że do średniowalności $\mathbb{G}$ wystarcza nuklearność $C_0(\hat{\mathbb{G}})$, o ile na $C_0(\hat{\mathbb{G}})$ istnieje stan śladowy. W dowodzie tej ostatniej własności wykorzystane zostało sprytne rozumowanie dotyczące ilorazu Kaca grupy $\hat{\mathbb{G}}$, maksymalnej podalgebry typu Kaca zawartej w $\hat{\mathbb{G}}$.

Rezultaty zawarte w tym rozdziale nie zostały jeszcze opublikowane. Wydaje się, że cenne byłoby znalezienie dla opisanych wyników konkretnych przykładów. Mimo tego uważam, że wyniki są ciekawe.

2. Ocena rozprawy

Struktura rozprawy jest czytelna i naturalna (rozdziały odpowiadają poszczególnym wynikom). Język pracy jest w mojej ocenie poprawny, typowy dla publikacji matematycznych. Praca jest napisana dość starannie i zawiera niewiele tzw. literówek.

Pewne zastrzeżenia mam natomiast do części edytorskiej rozprawy.

(1) W pracy brakuje wyjaśnienia niektórych symboli (np. $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$, $\mathrm{HS}(H)$, $L^\infty(\mathbb{G})^\sigma$), a niektóre pojawiają się trochę za późno (np. definicja χ_U pojawia się str. 91, l.13 zamiast w Definition 5.1). Zresztą ze względu na mnogość badanych obiektów bardzo przydałby się w rozprawie osobny spis oznaczeń (choć trzeba podkreślić, że nie jest to standard wymagany w rozprawach doktorskich z matematyki).

(2) W dowodach znajdują się liczne stwierdzenia pozostawione bez uzasadnień. Na przykład:
- str.76, l.12: "$\|qtt^* + (1-q)1\| = q\|tt^*\| + (1-q)$"(fakt, że mamy tu równość, a nie tylko $\leq$, jest kluczowym elementem dowodu Lemma 4.1);
- str.80, l.1: "the operator $1 - SS^*$ (...) is annihilated by any tracial state",
- str.89, l.-2: "In particular, B is not MASA";
- str.93, l.16: "the condition $\mathcal{C}'_{\mathbb{G}} \cap L^\infty(\mathbb{G}) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ implies that $\mathcal{Z}(L^\infty(\mathbb{G})) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$"

O ile taki styl jest normą w publikacjach naukowych, o tyle – według mnie – rozprawa doktorska powinna uzupełniać szczegóły w tego typu rozumowaniach. Często zresztą uzasadnienia byłyby bardzo krótkie i (dla specjalistów) dość standardowe, ale znacząco ułatwiłyby czytanie pracy i potwierdzały biegłość Doktoranta w tematyce rozprawy.

(3) Zaletą pracy są cytowania zawierające odsyłacze do konkretnych twierdzeń lub rozdziałów artykułów lub książek – znacząco ułatwia to odnalezienie właściwego rezultatu. Natomiast w mojej ocenie referencje do wielu rezultatów z literatury są zbyt zdawkowe.

Przykład 1: kluczowy argument prowadzący do sprzecznosci w hipotezie, że kwantowy dysk nie ma struktury grupy kwantowej, przedstawiony jest w postaci odsyłacza do "uwagi po Przykładzie"w pracy [64]. Bez odnalezienia tej pracy czytelnik nie jest w stanie zorientować się, o co chodzi. Tymaczasem przytoczenie rozumowania przedstawionego przez Neshveyeva i Tuseta zajęłoby zaledwie kilka linijek. W wielu innych miejscach rozprawy krótkie opisanie wyniku, z którego korzysta Doktorant, zamiast samego odsyłacza bardzo ułatwiłoby lekturę pracy.

Przykład 2: Uzasadnienie, że "$u_\gamma, \alpha(x) \in$ "$\mathcal{C}(\mathbb{H})$ dla $\gamma \in \mathbb{Q}, x \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$"polega na stwierdzeniu "Indeed, it is a consequence of [95, Theorem 3.7]."(str.98, l.8-9) Bez odnalezienia pracy Wanga trudno domyślić się, skąd wynika ten wniosek. Warto zresztą dodać, że cytowane twierdzenie 3.7 dotyczy "discrete Woronowicz Hopf C*-dynamical system" i wyjaśnienie, dlaczego ma ono tutaj zastosowanie to kolejna rzecz, która powinna być wyjaśniona w rozprawie (patrz punkt powyżej).

(4) Ponadto zauważyłam następujące usterki:

- Operator $\mathbb{Q}_{R,0}$ na stronie 43 jest oznaczany $\mathbb{Q}_R^0$ na stronie 37, gdzie i tak niełatwo go znaleźć (odpowiedni odnośnik na stronie 43 byłby bardzo pomocny).
- Na str.88, l.-1: zamiast Lemma 7.8 powinno być do Lemma 7.9.
- Równanie na str.91,l.11 ($\sigma_z^h \otimes 1_U = ...$)) jest niepoprawne – pomieszano dwie konwencje zapisu reprezentacji U.
- Na str. 93 cytowane jest Corollary 2.10.13 z pracy [78] – nie znalazłam takiego wniosku w [78].
- Powołanie się na wzór ze str.18, l.10 (a nie tylko na (5.5) i (5.6)) znacząco ułatwiłoby prześledzenie przekształceń na str.98, l.2 i 4.
- Corollary 5.22 i 5.26 są sformułowane niedbale. W obu wnioskach brak informacji, jakich grup kwantowych dotyczą. Np. wniosek 5.26 powinien zaczynać się "Niech U_F^+ będzie takie, że $\frac{\dim(\alpha)}{\dim_q(\alpha)} < \frac{1}{15}$, gdzie α oznacza...". Swoją drogą, czy $\frac{\dim(\alpha)}{\dim_q(\alpha)}$ nie dałoby się napisać w terminach macierzy F?

Pomimo wspomnianych usterek utrudniających lekturę dysertacji, stronę formalną rozprawy oceniam pozytywnie.

Konkluzja

Podsumowując, wyniki przedstawione w rozprawie uważam za oryginalne, ważne i ciekawe. Pytania stawiane w pracy są dobrze umotywowane, a ich rozwiązania – złożone i pomysłowe. Dowody wymagają użycia zróżnicowanych technik i rozumowań, ale wskazują także na dobrą znajomość literatury, z uwzględnieniem prac bardzo niedawnych.

Uważam, że przedłożona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki. Dlatego też wnoszę o dopuszczenie mgra Jacka Krajczoka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ze względu na istotność uzyskanych rezultatów wnoszę też o uznanie rozprawy za wyróżniającą.

A Wysoczańska-Kula