Witold Więsław (Wrocław)

Matematyka Hoene-Wrońskiego i za jego czasów

0. Wstęp.

Na wstępie należy zadać pytanie: czy Hoene-Wroński był polskim matematykiem? Odpowiedź jest raczej jednoznaczna: nie był. Ale uważał się za Polaka. Jego ojciec, Antoni Hoene, przybył z Czech. Podobnie, jak Mikołaj Łobaczewski, choć syn Polaka, nie był polskim matematykiem[1]. Łatwość, z jaką Hoene-Wroński przeszedł na służbę rosyjską pozwala domniemywać, że bardziej kierowały nim pobudki osobiste, aniżeli patriotyczne. Nie studiował w Polsce, tylko za granicą. Niektórzy biografowie podejrzewają[2], że uczył się w Korpusie Kadetów w Warszawie. Jednak przypuszczenie to nie znajduje potwierdzenia w faktach[3]. Nie miał więc Wroński żadnych związków z nauką w Polsce. A nauczanie na uniwersytetach w Krakowie i w Wilnie nie odbiegało od ówczesnych standardów europejskich[4]. Zostanie to przedstawione w ustępie 3. Po studiach Wroński przebywał we Francji, tam publikował i to wyłącznie w języku francuskim. W opracowaniach poświęconych polskim uczonym wymieniany jest zapewne tylko z powodu polskiego pochodzenia. Swoje dzieło *Wstęp do filozofii matematyki* dedykował cesarzowi Rosji, Aleksandrowi I.[5] Ale już rok później pracę o rozwiązywaniu równań algebraicznych dedykował Polsce[6]. Nie on jedyny wykazywał serwilizm w stosunku do cara Aleksandra I. Podobną dedykację znajdujemy w tłumaczeniu Józefa Czecha *Elementów* Euklidesa (Wilno, 1807). Jan Śniadecki, niewątpliwie polski patriota, w wielu swoich drukowanych wystąpieniach pisał peany na cześć tego cara. Wynikało to nie tylko z istniejącej sytuacji politycznej, lecz także z niewątpliwych zasług cara dla rozwoju Uniwersytetu Wileńskiego i Wileńskiego Okręgu Szkolnego. Zarówno na Uniwersytecie, jak i w szkołach, językiem wykładowym pozostawał, jak w czasach Komisji Edukacji Narodowej nadal język polski.

Hoene-Wroński nie był znany ówczesnym uczonym polskim. Jan Śniadecki w liście do Romana Markiewicza[7] pisał[8]:

---

[1] Mikołaj Łobaczewski był synem Polaka, geodety Jana Łobaczewskiego. Kopie oryginalnych dokumentów, metrykę urodzenia Mikołaja, itp. można znaleźć w publikacji: *Научное Наследство. Том 12, Новые материалы к биографии Н И. Лобачевского*, Ленинград, НАУКА, 1988.

[2] Co prawda pisze o tym Dickstein [6], ale w przypisie 9 (Rozdział I) sam poddaje w wątpliwość to przypuszczenie. Przypuszczenie to powtarza *Słownik biograficzny matematyków polskich*, Redakcja: Stanisław Domoradzki, Zofia Pawlikowska-Brożek, Danuta Węglowska, Tarnobrzeg 2003.

[3] por.: Kamila Mrozowska, *Szkoła Rycerska*, 1961. W podanym tam spisie kadetów, którzy byli słuchaczami Szkoły Rycerskiej, Wroński nie figuruje, ani jako Hoene, ani jako Chejne lub podobnie.

[4] por. Witold Więsław, *Matematyka polska epoki Oświecenia* (w druku).

[5] por. [12], tom 1. W podtytule do pracy : *Introduction a la philosophie des mathématiques, et technie de l'algorithmie*, czytamy: *Ci-devant Officier supérieur d'Artillerie au service de Russie*, a kilka stron dalej : *Dédié a sa Majesté l'Empereur Alexandre I^er^, autocrate de toutes les Russies* ; także : [13]; tłumacz dzieła, Paulin Chomicz, chcąc zapewne nieco stonować dedykację Wrońskiego, napisał : *Autor dzieło to dedykował Cesarzowi Rosji Aleksandrowi I, w którym podówczas upatrywano przyjaciela Polski*.

[6] tamże [12], tome 4: *Résolution générale des équations de tous les degrés ; Dédiée à la Pologne, ancienne patrie de l'Auteur*.

[7] Roman Markiewicz (1770-1842), nauczyciel w Pińczowie, a od roku 1797 w Szkołach Nowodworskich. Autor prac i podręczników fizyki. Po studiach w Wiedniu i Paryżu został profesorem fizyki na UJ (od roku 1812). (wg: *Korespondencja Jana Śniadeckiego*, tom II, Ossolineum, Wrocław 1954).

[8] *Jana Śniadeckiego Astronoma Obserwatora i Rektora Uniwersytetu Wileńskiego w czasie iego urzędowania w rzeczach do Uniwersytetu i Szkół należących. Korespondencja i Pisma*. Tom VI, BUWil rks F13-130. (s. 7-8)

№ 71. Do Jmć Pana Romana Markiewicza. d. 11. 8bra 1812.
[...] Niewiem kto iest P. Wronski któregoś mi ams Pan przysłał dyssertacyą: cokolwiek o niey powie Fakultet, nauka z takiego sposobu nie weźmie wzrostu. Ciekawy byłbym czytać iego Philosophie des Mathematiques o którey wspomina, a którey nieznam. Zdaie mi się, że to iest matematyczny Kantysta. Zagrzebany w rządowe prace i zatrudnienia, przy licznych kłopotach i troskach ledwo mam czas wytchnąć. [...] [9]

Okres życia Hoene-Wrońskiego (1776-1853) niemal pokrywał się z okresem życia Carla Friedricha Gaussa (1777-1855). Dlatego mówiąc o matematyce czasów Hoene-Wrońskiego można też myśleć o matematyce czasów Gaussa. Temu okresowi poświęcona była XIV Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki (Zielona Góra, 8-13 maja 2000). Poruszone tam zagadnienia można znaleźć w [15].

1. Matematyka końca XVIII wieku.

Tak, jak niemal cały XVIII wiek, zwany przez historyków matematyki *wiekiem zastosowań*, zdominowany był w naukach matematyczno – fizycznych przez Leonharda Eulera (1707-1783), to już w jego drugiej połowie zaznaczyli swoje ważne miejsce matematycy francuscy, najpierw Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), a potem Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Adrien – Marie Legendre (1752-1833) i Pierre Simon de Laplace (1749-1827), żeby wymienić tylko najważniejszych.

Ważniejsze dzieła tego okresu:

Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique Analytique*, 1788.
Joseph-Louis Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques, contenant Les Principes du Calcul différentiel*, 1797.
Adrien-Marie Legendre, *Géometrie*, 1794.
Adrien-Marie Legendre, *Théorie des nombres*, 1798.
Pierre Simon de Laplace, *Mécanique céleste*, 1799.
Paolo Ruffini, *Teoria generale delle equazioni*, 1799.

Mechanika analityczna stała się podstawowym dziełem z mechaniki aż do czasów Williama Rowana Hamiltona (1805-1865). Natomiast *Teoria funkcji analitycznych* była wzorcowym podręcznikiem analizy na wielu uniwersytetach europejskich do lat trzydziestych XIX wieku, m. in. na uniwersytetach w Krakowie, Wilnie (do jego zamknięcia przez władze carskie w roku 1832) i Warszawie (1816-1831).

Wymienione książki Legendre'a były ważne z kilku powodów. Jego *Geometria* jest pierwszą w historii próbą odejścia w nauczaniu geometrii od *Elementów* Euklidesa. Można by mówić o sukcesie, gdyby nie fakt, że Legendre twierdził, iż podał dowód V Postulatu[10]. Na szczęście, w kolejnych wydaniach książki nie ma już tego „dowodu". Natomiast na uwagę zasługuje fakt, że zagadnienia metryczne oparł Legendre na twierdzeniu równoważnym twierdzeniu kosinusów, ale bez użycia funkcji trygonometrycznych. W przypisie (*Note* IV) Legendre dowiódł niewymierności π^2, uogólniając wynik Johanna Heinricha Lamberta (π jest liczbą niewymierną) i stawiając hipotezę, że π nie jest pierwiastkiem niezerowego

[9] Zapewne chodziło o pierwszą opublikowaną pracę Hoene-Wrońskiego [11] albo o manuskrypt jakiejś innej pracy.
[10] Zazwyczaj nazywa się ten postulat *Aksjomatem o równoległych*, co rozmija się z prawdą historyczną. Równoważność V Postulatu ze wspomnianym aksjomatem (przez punkt nie leżący na prostej przechodzi dokładnie jedna równoległa do niej) udowodnił uczony islamski, Omar Chajjam w XI w. Uczeni europejscy uważają niekiedy, że równoważność V Postulatu z aksjomatem o równoległych wykazał John Playfair (XVIII w.) lub Joseph Diez Gergonne (początek XIX w.), co wynika z małej znajomości matematyki islamu.

wielomianu o współczynnikach wymiernych, tzn. że π jest liczbą przestępną. Termin ten nie był wówczas używany w tym znaczeniu, co dziś.

Teoria liczb Legendre'a była pierwszym nowoczesnym ujęciem tego przedmiotu. Co prawda były w niej luki (np. niekompletny dowód prawa wzajemności reszt kwadratowych), ale książka była liczącym się osiągnięciem w matematyce. Autor miał jednak pecha: wkrótce wyszła znacznie głębsza i bogatsza w treść książka Gaussa.

Nie będę tu omawiał znaczenia *Mechaniki nieba* Laplace'a. Dość powiedzieć, że niektórzy historycy nauki uważają to dzieło za najważniejsze osiągnięcie autora.

Na specjalną uwagę zasługuje dzieło Ruffiniego. Paolo Ruffini, w oparciu o idee Lagrange'a napisał traktat, którego pełny tytuł brzmi: *Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostrata impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grade superiore al quarte*, *Bologna 1799*, w którym rozstrzygnął problem negatywnie: *ogólne równanie stopnia n>4 nie jest rozwiązalne przez pierwiastniki*. W następnych latach podał on jeszcze cztery inne wersje dowodu swojego twierdzenia. Niels Henrik Abel [1] uzyskał ten wynik w nieco inny sposób. Evariste Galois dał w latach 1830-32 zręby teorii, rozbudowanej później m. in. przez Richarda Dedekinda (1857-60) i Camille'a Jordana (1870), z której łatwo wyprowadzić twierdzenie Ruffiniego. Zarówno w dowodzie Ruffiniego, jak i w dowodzie Abela są pewne luki, ale łatwe do uzupełnienia (por. [20] i prace tam cytowane).

2. Matematyka pierwszej połowy XIX wieku.

Klasyfikacja matematyki.

Dziewiętnastowieczna klasyfikacja matematyki przedstawia się następująco (por. [8], tom I, s. LIII-LIV):

Arytmetyka. Teoria liczb. Analiza nieoznaczona.
Arytmetyka elementarna. Teoria liczb. Analiza nieoznaczona.
Analiza algebraiczna.
Ogólna teoria ułamków. Wielkości urojone. Teoria równań. Szeregi[11].
Rachunek infinitezymalny.
Rachunek różniczkowy. Rachunek całkowy. Rachunek wariacyjny.
Rachunek prawdopodobieństwa. Arytmetyka polityczna.
Geometria elementarna.
Trygonometria i analiza trygonometryczna.
Sporządzanie map.
Geometria analityczna.
Geometria krzywych. Przekroje stożkowe. Krzywe wyższych rzędów. Wyprostowanie krzywych. Badanie krzywych. Powierzchnie.

Ponadto, jeszcze zgodnie z osiemnastowieczną tradycją, do matematyki wliczano mechanikę, hydrostatykę i hydrodynamikę, astronomię, fizykę i optykę.

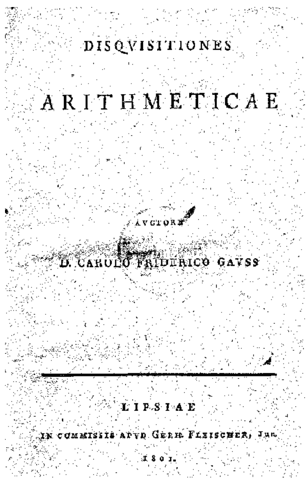
Ważniejsze dzieła I połowy XIX wieku:

Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.
[Przekład francuski: *Recherches arithmétiques*, traduites par A.-C.-M. Poullet-Delisle, a Paris, Chez Courcier, 1807]
Carl Friedrich Gauss, *Theoria motus Corporum Coelestium*, 1809.
Pierre Simon de Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 1812.

[11] Szeregi zaliczano do algebry od samego początku, tzn. od XVII stulecia. Wszelkie zagadnienia dotyczące szeregów, iloczynów nieskończonych i ułamków łańcuchowych stanowiły przedmiot zainteresowań algebry. Zapoczątkował to John Wallis dziełem *Arithmetica Infinitorum*, Oxonii, Anno1656.

Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828.
Carl Friedrich Gauss, *Ueber Gegenstände der höhere Geodäsie*, 1846.
Augustin Louis Cauchy, *Exercises d'analyse et de physique mathématique*, tome I-IV, 1826-1829.
William Rowan Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Dublin 1853.

Jak widać z tego zestawienia, nie umniejszając roli matematyków francuskich, w I połowie XIX wieku w matematyce europejskiej dominował Gauss. Rolę Gaussa i skalę jego nie opublikowanych wyników uwidocznił odnaleziony dopiero po jego śmierci dziennik (*Tagebuch*), prowadzony przez niego w latach 1795-1814.


DISQVISITIONES
ARITHMETICAE
AVCTORE
D. CAROLO FRIDERICO GAVSS
LIPSIAE
IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Iun.
1801.

Strona tytułowa *Disquisitiones Arithmeticae* Gaussa

Algebra.
Bibliografię podstawowych prac z algebry w I połowie XIX wieku zawiera mój artykuł *Algebra w czasach Gaussa* (por. [15], 163-174). Dlatego też poniżej nie podaję szczegółowo źródeł.

Nowe idee w algebrze. Początki teorii grup.
Nową ideą było przede wszystkim pojęcie grupy. Pojęcie grupy, jeszcze nie nazwane, wystąpiło po raz pierwszy u Lagrange'a (grupa permutacji n elementów), a później u Ruffiniego. Gauss w swoich *Disquisitiones Arithmeticae* (*Rozważania arytmetyczne*) posługuje się grupą addytywną i multyplikatywną pierścienia reszt modulo n, a metody dowodów są teorio – grupowe. Galois w jednym ze swoich nielicznych rękopisów, przygotowanych w ciągu krótkiego i burzliwego żywota, wypisał niektóre własności grupy permutacji, służące dziś jako aksjomaty tego pojęcia, użył terminu *groupe*, ale raczej jako zbioru aniżeli grupy, gdyż tego samego terminu używał w stosunku do warstw grupy względem podgrupy. Czy więc na pewno on jest twórcą tego pojęcia, jak twierdzą niektórzy? Z całą pewnością formalnym twórcą pojęcia grupy abstrakcyjnej był Arthur Cayley, który zdefiniował je w 1854 roku. Do tego czasu zajmowano się jedynie grupami permutacji n elementów. Gauss w *Disquisitiones* badał grupę klas form kwadratowych.

W jednej z nielicznych prac, które Galois zdołał opublikować (*Sur la théorie des nombres*, 1830) konstruuje on ciała skończone, zwane dziś jego imieniem. Galois dowodzi, jak mając wielomian f o współczynnikach całkowitych, nieprzywiedlny modulo liczba pierwsza p (a więc nad ciałem reszt modulo p, którym posługiwał się już Gauss w *Disquisitiones Arithmeticae*), skonstruować ciało o p^n elementach, gdzie n oznacza stopień tego wielomianu.

Praca zawiera podstawowe własności ciał skończonych. Pojęcia ciała jeszcze wtedy nie było. Prócz pojęcia grupy istotne znaczenie w czasach Gaussa zaczynają odgrywać obiekty formalnie definiowane takie, jak liczby zespolone (Hamilton 1837; Cauchy 1846), kwaterniony (Hamilton 1843), przestrzenie liniowe (Grassmann 1844), macierze (Cayley 1855). Wprowadzone zostają następujące pojęcia: *przemienność* (Servois 1813), *łączność* (Hamilton 1853), *rozdzielność mnożenia względem dodawania* (Hamilton 1853).

Czasy Hoene-Wrońskiego przyniosły geometryczną interpretację liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny. Odkrycia tego dokonali niezależnie C. Wessel w 1799 i J. R. Argand w 1806 (publikacja z 1813).

Kwaterniony.
W roku 1770 L. Euler opisał obroty kuli wokół jej środka, a ściślej, rzeczywiste macierze unitarne, wyprowadzając stąd, że każdy obrót kuli wokół jej środka jest obrotem wokół pewnej osi. W 1843 roku William Rowan Hamilton odkrył kwaterniony, po kolejnych niepowodzeniach w próbach przekształcenia trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w ciało, na wzór konstrukcji w dwuwymiarowej przestrzeni, którą sam podał w 1837 roku. W swojej książce *Lectures on Quaternions* z 1853 roku jako jedno z pierwszych zastosowań skonstruowanego obiektu podał opis obrotów kuli, utożsamiając punkt przestrzeni z odpowiednim kwaternionem czystym, tzn. przyporządkowując punktowi (a, b, c) kwaternion $x = ai + bj + ck$. Znaleziony wzór jest prosty: każdy obrót g kuli ma postać: $g(x) = qxq^{-1}$, gdzie q jest ustalonym kwaternionem, a x przebiega kulę, tzn. wszystkie kwaterniony czyste o normie $\leq r$. Hamilton wyznaczył w ten sposób, jak składać obroty kuli, podając jawne wzory. Okazuje się, że w dziełach Gaussa znajduje się nie datowana notatka, zapewne z lat 1819-23, w której podany jest jawny wzór na mnożenie punktów czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Konstrukcja, jak wynika z tekstu, miała służyć do opisu składania obrotów przestrzeni trójwymiarowej. Nie ma więc wątpliwości, że to już Gauss skonstruował kwaterniony. Gauss jednak nie opublikował swoich wyników i priorytet, bez wątpienia, słusznie przypadł Hamiltonowi.

Początki algebry liniowej.
Do lat czterdziestych XIX wieku jedynie wyznaczniki stanowiły obiekt zainteresowań matematyków, głównie ze względu na potrzeby analizy (zamiana zmiennych w całkach wielowymiarowych). Wymienić w związku z tym należy przede wszystkim Cauchy'ego, Jacobiego i Catalana. Rozwijała się teoria form dwuliniowych i kwadratowych w przestrzeni euklidesowej (Lagrange, Jacobi). Kolejne lata przyniosły publikacje zawierające nowe pojęcia, których znaczenie doceni dopiero wiek XX: w 1843 Cayley zdefiniował przestrzeń n-wymiarową. Rok później ukazało się fundamentalne dzieło Hermanna Grassmanna *Ausdehnungslehre*. Cayley wprowadził pojęcie macierzy (1855), rozbudował algebrę macierzy i wprowadził niezmienioną do dziś terminologię (1858). Cayley dowiódł np., że kwadratowe układy równań liniowych redukują się do jednego liniowego równania macierzowego postaci $AX = B$. Równanie takie rozwiązuje się podobnie, jak w przypadku liczbowym, trzeba tylko znaleźć element odwrotny do A, który nazywa macierzą odwrotną. Podał też algorytm jej obliczania. Macierzami zajmował się także Catalan.

Teoria liczb.
Tu wymienić należy przede wszystkim Gaussa i jego wyniki w *Disquisitiones Arithmeticae*: elementarna arytmetyka wyłożona w języku kongruencji przez niego wprowadzonych, prawo wzajemności reszt kwadratowych, teoria binarnych form kwadratowych, ich równoważność i klasy form; wreszcie słynne twierdzenie o konstruowalności N–kątów foremnych:

N-kąt foremny jest konstruowalny cyrklem i linijką, wtedy i tylko wtedy, gdy N jest postaci:
$N = 2^n p_1 p_2 \dots p_s$, *gdzie p_i są różnymi liczbami pierwszymi Fermata,*

wykorzystujące w dowodzie wyłożoną wcześniej arytmetykę pierścieni wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych i wymiernych.

Lejeune Dirichlet po raz pierwszy użył poprawnie metod analitycznych w teorii liczb, dowodząc m. in., że w każdym postępie arytmetycznym $an + b$ (liczby a i b są względnie pierwsze) istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ernst Kummer, uogólniając dotychczas udowodnione przypadki Wielkiego Twierdzenia Fermata, związał to twierdzenie z własnościami liczb Bernoulliego, dowodząc m. in. w ten sposób prawdziwości tego twierdzenia dla wykładników mniejszych od 101. Stworzona przez niego teoria liczba idealnych zapoczątkowała rozwój arytmetyki ciał liczbowych i wpłynęła na powstanie takich pojęć jak ciało i pierścień.

Carl Gustav Jacob Jacobi, stosując zbudowaną przez siebie i przez Abela teorię funkcji eliptycznych, znalazł w roku 1828 formułę na liczbę czterech kwadratów w przedstawieniu dowolnej liczby naturalnej n: $r_4(n) = 8\sum d$ (gdzie d przebiega dzielniki n niepodzielne przez 4), podając w ten sposób efektywny dowód twierdzenia Eulera-Lagrange'a o sumach czterech kwadratów.
Na początku II połowy XIX wieku Czebyszew wykazał, że dla liczb $n > 3$, między n i $2n$ leży liczba pierwsza. Jego twierdzenie o rozkładzie asymptotycznym liczb pierwszych pochodzi z II połowy XIX wieku.

Geometria.
Rozwój geometrii w omawianym okresie był szczególnie intensywny. Mikołaj Łobaczewski i niezależnie Janos Bolyai stworzyli geometrie nieeklidesowe, których istnienia domyślał się już Gauss w młodości, ale nie zdecydował się zająć tym zagadnieniem. Istnieją natomiast pośrednie dowody jego zaangażowania w geometrię nieeklidesową. Będąc uczniem szkoły podstawowej, Gauss dyskutował na ten temat ze starszym od niego o osiem lat Johannem Bartelsem, pomocnikiem nauczyciela. Bartels po ukończeniu studiów wyjechał do Kazania i został profesorem tamtejszego Uniwersytetu, ucząc młodego Mikołaja Łobaczewskiego. Natomiast Gauss studiując w Getyndze spotkał tam Farkasa Bolyai, z którym się zaprzyjaźnił. Farkas przez całe życie usiłował dowieść V Postulat Euklidesa, co skłóciło go z synem Mikołajem, będącym odmiennego zdania.

Natomiast niewątpliwie Gauss przyczynił się do powstania nowoczesnej geometrii różniczkowej. Początków geometrii różniczkowej można już się doszukać u Newtona, a Leonhard Euler pisał na ten temat obszerne rozprawy. Jednak dopiero Gauss w cytowanej pracy z 1828 roku udowodnił podstawowe jej twierdzenia, a w szczególności słynne twierdzenie *Theorema egregium* o wewnętrznej geometrii powierzchni.

Początek XIX wieku przyniósł rozwój geometrii wykreślnej oraz budowanie teoretycznych podstaw tej geometrii, tzn. geometrii rzutowej. Najważniejsze osoby związane z jej rozwojem to: Charles Brianchon, Jean Poncelet, Gaspar Monge i Lazare Carnot.

Na początku XIX wieku usystematyzowano geometrię analityczną w przestrzeni trójwymiarowej, stosowaną co prawda już w XVIII stuleciu, ale jedynie przez nielicznych uczonych (głównie przez Eulera i Lagrange'a). Wymienić tu należy następujących matematyków francuskich: M. Bérard, J, J. Bret, J. Gergonne, G. Lamé, M. Livret, C. M. Raymonde.

Pierwsza połowa XIX wieku przynosi też zaskakująco wiele nowych odkryć w geometrii elementarnej. Oto kilka typowych wyników.

Farkas Bolyai (i niezależnie Paul Gerwien) udowodnili twierdzenie znane w starożytności, choć wtedy nie udowodnione (dla Greków był to fakt oczywisty): *każde dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez podział*; każdy z nich można podzielić na trójkąty, z których da się złożyć drugi. Dowód twierdzenia podał Bezout już w połowie XVIII wieku, ale nie był świadom, że je udowodnił. Gerwien (1833) dowiódł tego także dla wielokątów sferycznych na ustalonej sferze.

Brianchon i Poncelet (1821) udowodnili twierdzenie o dziewięciu punktach trójkąta:
spodki wysokości trójkąta, środki boków i środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami tego trójkąta, leżą na jednym okręgu. Promień tego okręgu jest połową promienia okręgu opisanego na trójkącie, a jego środek leży w połowie odcinka łączącego ortocentrum ze środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Karl Feuerbach uzupełnił je rok później dowodząc, że
okrąg dziewięciu punktów jest styczny do okręgu wpisanego i okręgów zewnętrznie wpisanych w trójkąt.

Pierre Laurent Wantzel (1837) podał opis punktów dających się skonstruować cyrklem i linijką z odcinka jednostkowego: są to punkty, których współrzędne wyrażają się przez pierwiastniki stopnia 2 nad ciałem liczb wymiernych. Przy użyciu tego twierdzenia dowiódł niemożliwości trysekcji kąta i podwojenia sześcianu. Fakty te były jednak znane już na początku XVIII stulecia (Gvisnée).

Niels Henrik Abel opisał podział lemniskaty Bernoulliego na n równych części cyrklem i linijką. Warunek jest taki sam, jak w twierdzeniu Gaussa o konstruowalności n–kątów foremnych. W dowodzie Abel posłużył się funkcjami eliptycznymi.

Na koniec odnotujmy twierdzenie, którego autorem jest Simon L'Huilier[12] (1813). Niech V oznacza liczbę wierzchołków wielościanu, E – liczbę jego krawędzi, a F – liczbę ścian. Jeżeli wielościan ma p dziur (*rodzaj* wielościanu, albo jego *genus*), to $V - E + F = 2 - 2p$. Twierdzenie to uogólnia znany wzór Eulera[13]. Twierdzenie L'Huiliera dało początek topologii algebraicznej. Nieco później Johann Benedict Listing napisał ważną rozprawę z topologii: *Vorstudien zur Topologie* (1847).

Augustus Ferdinand Möbius jest autorem rozprawy *Der Barycentrische Calcul*, Leipzig, 1827.

Analiza i probabilistyka.

Pierwsza połowa XIX wieku była w analizie zdominowana przez trzy podstawowe tematy: funkcje eliptyczne, funkcje analityczne i funkcje wielu zmiennych. Ponadto ukazywało się wiele prac, które dziś zaliczamy do zastosowań matematyki (geodezja i kartografia, równania fizyki matematycznej, np. hydromechanika, mechanika, itd.).

Teoria funkcji eliptycznych (Abel, Jacobi) rozwijała się równoległe do ogólnej teorii funkcji analitycznych (Lagrange, Cauchy), dlatego została wymieniona osobno. Była już mowa o spektakularnych zastosowaniach tej teorii (liczba przedstawień liczby naturalnej w postaci sumy kwadratów, twierdzenie o dzieleniu lemniskaty na n równych części cyrklem i linijką). Twórcą tej teorii był też Gauss, jak świadczą o tym jego nie opublikowane zapiski w *Dzienniku*.

[12] L'Huilier dobrze zasłużył się polskiej edukacji. Był autorem podręczników matematyki dla polskich szkół w czasach Komisji Edukacji Narodowej (1773-1794). W czasie pobytu w Polsce wygrał konkurs na podręcznik analizy, ogłoszony przez Berlińską Akademię Nauk. (EXPOSITION ÉLEMENTAIRE DES PRINCIPES DES CALCULS SUPÉRIEURS, QUI A REMPORTÉ LE PRIX PROPOSÉ PAR L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES POUR L'ANNEE 1786. Á BERLIN). W książce tej po raz pierwszy użył symbolu LIM i sformułował podstawowe własności granicy. Granice, którymi się posługiwał, były granicami jednostronnymi.

[13] List Leonharda Eulera do Christiana Goldbacha z 14. XI 1750 roku. Pełny jego tekst można znaleźć w moim artykule: *Odkrycie wzoru Eulera*, Matematyka 6'97, 336-338.

Podejmowano próby uściślenia analizy poprzez precyzyjniejsze definicje liczb rzeczywistych i zespolonych (Bernhard Bolzano, Augustin-Louis Cauchy). Jednak ścisłość i precyzja w analizie pozostawiały jeszcze wiele do życzenia.

Zasług Gaussa i Laplace'a w zakresie budowania analitycznej teorii prawdopodobieństwa nie trzeba tu przypominać. Są to fakty dobrze znane matematykom.

3. Uniwersytety.

W kontekście burzliwego rozwoju matematyki w omawianym okresie, warto porównać poziom nauczania w tym czasie na uniwersytetach europejskich, na których najczęściej studiowali Polacy. Poniżej przedstawię krótko zakres nauczania matematyki na polskich uniwersytetach (Kraków, Wilno) i dla porównania, na uniwersytetach pruskich (Królewiec, Berlin). Szczegóły można znaleźć w [22].

Kraków (przed trzecim rozbiorem: Szkoła Główna Koronna; potem: Uniwersytet Krakowski).

Przed reformami Komisji Edukacji Narodowej matematyka w Akademii Krakowskiej była na niskim poziomie. Wykładano elementarną arytmetykę, geometrię wg Euklidesa, astronomię, statykę, architekturę cywilną i militarną. Okres reform Kołłątaja (od roku 1777) przyniósł stopniową poprawę sytuacji. Analizę matematyczną (w ramach wykładu astronomii) wykładał Jan Śniadecki od roku 1782. Ponadto wykładano geometrię elementarną i mechanikę. Pod rządami Austriaków (1797-1810) Uniwersytet bardzo podupadł, a wykłady prowadzili sprowadzeni z Austrii profesorowie. Od roku 1813 do 1830 niemal bez zmian prowadzono wykłady według programów Karola Hube[14]. Wykładano arytmetykę, analizę, geometrię analityczną, algebrę z trygonometrią, geometrię wykreślną, mechanikę i hydraulikę.

Wilno (przed trzecim rozbiorem: Szkoła Główna Litewska; potem: Cesarski Uniwersytet Wileński).

Analizę matematyczną wykładano w Akademii Wileńskiej już od roku 1756. W okresie reform Komisji Edukacji Narodowej, tj. od roku 1780, poziom nauczania matematyki w Szkole Głównej Litewskiej podupadł. Podniósł się dopiero od roku 1807, w wyniku działań rektora Jana Śniadeckiego. Coraz rzadziej wykładano geometrię w duchu Euklidesa. Pojawił się wykład analizy matematycznej funkcji jednej i wielu zmiennych, wraz z zastosowaniami, geometria analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni. Dołączono też na stałe elementy algebry, tzn. algebrę wielomianów. Dochodziła do tego jeszcze mechanika zwana racjonalną, trygonometria płaska i sferyczna, geometria wykreślna, a od lat trzydziestych rachunek prawdopodobieństwa[15]. Matematyka musiała sprostać wymaganiom innych wydziałów i potrzebom praktyki. A wymagano np., aby studenci medycyny uczestniczyli przez rok w zajęciach na Wydziale Nauk Fizycznych i Matematycznych. To głównie oni, wraz z przyszłymi inżynierami, zapewniali odpowiednią frekwencję na zajęciach z matematyki, fizyki i chemii. Podobnie było w Krakowie. Także tam studenci medycyny uczyli się przez

[14] Syn Michała Hube, dyrektora Szkoły Rycerskiej, autora podręcznika fizyki dla Szkół Narodowych. Karol Hube uczęszczał do Szkoły Rycerskiej (1782-1788). Potem studiował w Tybindze (Tübingen). Był jednym z wybitniejszych wykładowców matematyki (1811-1841) na Uniwersytecie Jagiellońskim w XIX wieku. Np. w roku 1812/13 dowodził niewykonalności trysekcji kąta i podwojenia sześcianu. Na ogół przypisywane to jest P.-L. Wanzlowi (1837).

[15] Aż do likwidacji przez władze carskie Uniwersytetu Wileńskiego w roku 1832.

rok matematyki[16]. Od czasów rektoratu Jana Śniadeckiego[17] oferta dydaktyczna z matematyki była bardzo bogata, w porównaniu z innymi uniwersytetami w tym rejonie Europy (Dorpat, Królewiec). Szczegóły można znaleźć w [21].

Uniwersytet w Królewcu.
W Królewcu na początku XIX wieku było zazwyczaj dwóch lub trzech profesorów, którzy prowadzili po jednym wykładzie obowiązkowym i po jednym wykładzie prywatnym. Wśród nich był F.W. Bessel.

Uniwersytet w Dorpacie (Tartu).
W latach 1815-1830 w Dorpacie wykładano na przemian geometrię, rachunek różniczkowy i całkowy oraz trygonometrię (płaską i sferyczną). Wykłady prowadził jedyny profesor, G. Struve. M. Bartels rozpoczął wykłady w Dorpacie w 1821 roku, przenosząc się tam z Kazania. Z jego nadejściem liczba wykładów wzrosła. Liczba wszystkich wykładów w ciągu jednego roku akademickiego wahała się od trzech do pięciu.

Uniwersytet w Berlinie.
W latach 1826-1831 na Uniwersytecie Berlińskim studiował Karol Libelt[18]. Notatki pozostałe po nim i jego kolegach[19] pozwalają ocenić zakres wykładanej tam matematyki. Wykłady obejmowały analizę, geometrię Euklidesa, algebrę (arytmetyka wielomianów i szeregi potęgowe), trygonometrię. Ponadto wykładano przedmiot *Analysis der Endlichen*, obejmujący elementy kombinatoryki i wzór dwumienny z zastosowaniami.

Wykłady w Krakowie i Wilnie były ściśle oparte na podręcznikach matematyków francuskich takich, jak J.-L. Lagrange, S. F. Lacroix, J. A. J. Cousin i inni. Natomiast w Berlinie i Królewcu dominowała literatura niemiecka.

Na uniwersytetach polskich, podobnie jak w tym okresie w Królewcu i Berlinie, badania naukowe były czymś zupełnie wyjątkowym. Poziom i zakres nauczania matematyki w Krakowie i Wilnie nie odbiegał od jej poziomu w wymienionych uniwersytetach. Najwięcej wykładów z szeroko rozumianej matematyki (lata 1815-1830) oferował Uniwersytet Wileński (por. [21]).

4. Matematyka Hoene-Wrońskiego w świetle jego rękopisów.

Przejdźmy teraz do omówienia wybranych rękopisów matematycznych Hoene-Wrońskiego. Kolekcja jego rękopisów znajduje się w Bibliotece Kórnickiej [14].

Notatki z teorii liczb BK 2253. Notatki wyglądają jak ćwiczenia studenta z teorii liczb. Użycie symbolu kongruencji wskazuje na to, że Wroński znał dzieło Gaussa *Disquisitiones Arithmeticae* (1801). Ponieważ nigdzie nie ma jednoznacznego dowodu, że Wroński dobrze znał łacinę, należy przypuszczać, że czytał francuski przekład tego dzieła (z 1807 roku). Autor rozwiązuje kongruencje stopnia 1 i 3 [J5]. W [J7] przytacza wzory na sumy parzystych potęg odwrotności liczb naturalnych, tzn. podaje wartości funkcji Riemanna $\varsigma(2k)$ dla $k = 1, ..., 5$, przedstawiając je w postaci iloczynu nieskończonego. Wygląda to jak wypisy z *Introductio in analysin infinitorum* (1748) Leonharda Eulera. Tekst [J8] (20 s.) to liczne

---

[16] W 1818 roku Wielka Rada Uniwersytetu zatwierdziła programy studiów, zgodnie z którymi kandydaci medycyny zobowiązani byli uczęszczać przez dwa lata na zajęcia na Wydziale Matematyczno-Fizycznym, w tym przez rok na zajęcia z matematyki elementarnej i fizyki (*vide*: Archiwum UJ, rks WE I-17).

[17] Jan Śniadecki był rektorem Uniwersytetu Wileńskiego w latach 1807-1815.

[18] Karol Libelt był znanym działaczem niepodległościowym o rozległych zainteresowaniach obejmujących szeroko rozumiane: oświatę i wychowanie. Miał doktorat z matematyki; był autorem cenionych podręczników matematyki w języku polskim.

[19] W zbiorach rękopisów Biblioteki Jagiellońskiej.

przykłady do prawa wzajemności reszt kwadratowych. [J10a] to *Résidus Cubiques*, a [J10b] *Racines Cubiques*. Tekst [J11a] zatytułowany: *Equations générale des Nombres premiers et sa Résolution que donne l'Expression générale de ces Nombres* (13 s.) omawia Małe Twierdzenie Fermata i Twierdzenie Wilsona. Dalsze teksty:
[J12] *Méthode téléologique* (46 s.)
[J13] *Loi des Probabilités des Nombres Premiers* (16 s.)
[J14c] *Extrait de la Théorie des Nombres* (4 s.)
W *Metodzie teleologicznej* Wroński usiłuje znaleźć ogólne prawo wzajemności dla reszt potęgowych $x^m \equiv a(\mathrm{mod}\ M)$ nazywając je *Principe téléologique*, przez analogię do prawa wzajemności reszt kwadratowych. W [J14c] opisuje algorytm rozwijania liczb w ułamki łańcuchowe, używając swojej symboliki alefów. Nie rozumiem tekstu [J13]. Sprawia wrażenie szkicu i nie jest kompletny.

Reasumując, nie datowane teksty z teorii liczb nie zawierają nowych wyników. Świadczą jedynie o tym, że Wroński znał wyniki Eulera, Legendre'a i Gaussa z teorii liczb.

Notatki z algebry BK$_4$ 225. Tekst zawiera rozwinięcia pierwiastków równań algebraicznych i przestępnych w szeregi potęgowe i ogólniejsze. Rękopis zasługuje na odrębną publikację i szczegółowe omówienie.

Notatki z algebry BK 2228. Dokument składa się z kilku niezależnych części. W [A7] przytoczona jest metoda rozwiązywania równań stopnia 3. w [A9] autor przypomina metodę Bombelliego i Ferrariego rozwiązywania równań stopnia 4. W [A10] jeszcze raz jest mowa o równaniach stopnia 4.
[A11a]: *Résolution theorique génerale des l'equation du cinquième degrè* (*form algebrique*).
[A11$_{ba}$] : *Résolution génerale des l'equation du cinquième degrè* (144 s.). Jest to rękopis tekstu, zapewne przygotowywanego do druku, w którym są odsyłacze do 310 wzorów. Wzorów jednak nie wpisano.

Notatki z algebry BK$_4$ 2236/1, BK$_4$ 2236/2. Teksty poświęcone rozwiązywaniu równań algebraicznych dowolnego stopnia (odpowiednio79 s. i 129 s.). Teksty te omówione są w tym tomie.

Notatki z algebry BK$_2$ 2236/2 (s. 206). Autor przytacza wzory algebraiczne na pierwiastki równań algebraicznych dowolnego stopnia *m*, opublikowane w [11]. Dalsza część tekstu zawiera powtórzenia z wcześniejszych rękopisów. Tekst, podobnie jak **BK$_4$ 2236/1**, **BK$_4$ 2236/2**, zawiera przykłady numeryczne i odwołania do ponad 300 wzorów, których brak.

Notatki z algebry BK 2234. [A13a,b] *Formation et résolution de l'équation du cinquième degrè pour le 1er exemple*. Dalsze trzy przykłady numeryczne. [A13,b] Kilka przykładów równań stopnia 6.

Notatki z algebry BK 2237. *Construction synthétique des Equations à plusiers ...* . Autor przedstawia wielomian stopnia dwa zmiennych *x* i *y* w postaci :
$A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + A_1x + B_1y + C_0 = M_1\varphi_1(x,y)\varphi_1'(x,y) + M_2\varphi_2(x,y)\varphi_2'(x,y) +$
$M_3\varphi_3(x,y)\varphi_3'(x,y)$, gdzie każde φ ma postać $mx + ny + p$. Podana jest jawna postać przekształceń φ i sposób ich wyznaczania.

Dalsze części tego rękopisu (B2-B5) poświęcone są algebrze liniowej (wyprowadzenie wzorów Cramera, ogólne rozwinięcie Laplace'a, itd.).

Rękopisy zatytułowane**: PROBABILITES BK 2254, BK 2245**. Pierwszy z nich poświęcony jest kombinatoryce. W drugim są liczne rozwinięcia różnych funkcji w ułamki łańcuchowe, np. rozwinięcie $(a+x)^m$. W rozwinięciach tych występuje funkcja Wrońskiego *szin*. Jest to jedyny datowany rękopis Wrońskiego (*Paris, September 1811*).

Rękopis BK 2256 (33 s.) zatytułowany *Canonique des Probabilités* wart jest uwagi probabilistów.

Rękopis BK 2259 (60 s.) zawiera elementy planimetrii. Jest tam równoważność wielokątów przez podział, twierdzenie Pitagorasa z dowodem Euklidesa i Clairauta, gnomon i jego zastosowanie w geometrii, wreszcie twierdzenie Archimedesa (*pole koła jest równe polu trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątnymi są: promień koła i jego obwód*). Wyprowadzone są podstawowe własności podobieństw (No 7). Następnie wyłożone są podstawy trygonometrii płaskiej i sferycznej. Podstawowe wzory trygonometrii sferycznej wyłożone są na trzech stronach. Wydaje się, że autor wzorował się na *Trygonometryi kulistey* Jana Śniadeckiego. W końcowej części wyprowadzony jest wzór Leibniza:

$$\frac{\pi}{4} = arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c = 3{,}14159\ \&c\,.$$

Tekst nie zawiera niczego nowego z geometrii, ale wskazuje na dużą erudycję autora.

Nie zostały tu omówione wszystkie rękopisy matematyczne Hoene-Wrońskiego znajdujące się w Bibliotece Kórnickiej. Do części z nich nie było dostępu.

5. Krytyka Wrońskiego metody Lagrange'a.

Cytowane wcześniej dzieło Lagrange'a *Théorie des fonctions analytiques*, spotkało się z krytyczną oceną współczesnych mu matematyków. Ich wątpliwości budziło niesprecyzowane pojęcie granicy, niezbędne do definiowania takich pojęć, jak np. pochodna. Wroński krytykował Lagrange'a za jego wykład analizy w języku formalnych szeregów potęgowych, przedstawiony w *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797). Takie ujęcie spotkało się też z krytyką Bernharda Bolzano, znanego matematyka z Pragi, a także Jana Śniadeckiego. F. Cajori odnotowuje w swojej książce ([3], s. 258):

> The first to doubt the rigor of Lagrange's exposition of the calculus were *Abel Bürja* (1752-1816) of Berlin, the two Polish mathematicians *H. Wronski* and *J. Sniadecki* (1756-1830), and the Bohemian *B. Bolzano*, who were all men of limited acquaintance and influence.

6. Reakcje współczesnych na prace Wrońskiego.

Reakcja na pierwszą pracę Wrońskiego o rozwiązywaniu równań algebraicznych przez pierwiastniki była dość szybka (por. [9-10]). W trzecim tomie *Gergonne Journal* z roku 1812-1813 są dwa artykuły ([9-10]) redaktora Gergonne poświęcone pracy Wrońskiego [11]. Są to raczej komentarze, aniżeli wnikliwa ocena. W pierwszej z nich Gergonne podaje jawną postać pierwiastków wielomianu stopnia m w przypadku, gdy jego pierwiastki wyrażają się przez pierwiastniki, powtarzając konkluzję Wrońskiego (loc. cit. s. 11). W drugim z artykułów Gergonne odnotowuje, że konkluzja Wrońskiego w przypadku $m = 4$ jest zgodna z aktualnym stanem wiedzy: ogólne wzory Wrońskiego dają w tym przypadku algorytm znany już uczonym włoskim w XVI wieku (Tartaglia, Cardano, Scipio del Ferro i inni). Można mieć wątpliwości, czy Gergonne na prawdę przeczytał pracę Wrońskiego. Konkluzja Wrońskiego w [11] jest identyczna ze spostrzeżeniem Eulera [7], któremu wydawało się, że rozwiązał ogólne równanie algebraiczne przez pierwiastniki. W przeciwieństwie do Eulera, który podane wzory stosuje w szczególnych przypadkach, Wroński jest przekonany, że obowiązują one zawsze. W tym czasie dostępna już była cytowana wcześniej książka Ruffiniego *Teoria generale delle equazioni*, 1799. Po pierwsze, informacja nie rozchodziła się w tamtych czasach tak szybko, jak dziś; po drugie, jeszcze wierzono, że wszystko w matematyce jest możliwe; wreszcie, po trzecie, dlaczego mielibyśmy wierzyć profesorowi medycyny, który tylko w wolnych chwilach zajmuje się matematyką? Znacznie później zareagował sam Ruffini [17]. W pracy tej uzasadnia, w oparciu o własne, wcześniejsze wyniki, że wzory Wrońskiego są fałszywe dla równań stopnia większego niż cztery.

Ani cztery różne dowody Ruffiniego, ani prace Abela [1-2] nie przekonały matematyków o tym, że równania stopnia co najmniej pięć na ogół nie dają się rozwiązać przez pierwiastniki. Nawet, gdyby dowody Ruffiniego i Abela były bardziej przekonywujące dla współczesnych, zapewne i tak nie zaakceptowano by ich: matematycy nie byli jeszcze gotowi dopuścić myśli, że coś nie jest możliwe w matematyce.

Można odnieść wrażenie, że nikt do tej pory nie przeanalizował krytycznie pracy Wrońskiego [11].

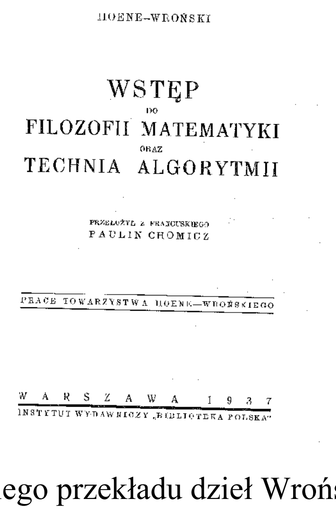
Ale reakcje współczesnych dotyczyły też późniejszych wyników Wrońskiego. Cayley [5] skomentował algorytm Wrońskiego rozwijania funkcji względem danego ciągu funkcji. Przykłady przytoczone w [5] zdają się wskazywać na to, że Cayley dobrze zrozumiał pomysł Wrońskiego.

7. Podsumowanie.

Streszczając w kilku zdaniach podstawowe osiągnięcia matematyki za czasów Hoene-Wrońskiego należy wymienić przede wszystkim: odkrycie geometrii nieeklidesowych, stworzenie podstaw geometrii rzutowej, powstanie nowoczesnej teorii liczb, nowy etap w rozwoju algebry polegający na rozszerzeniu jej zakresu od algebry wielomianów i wszystkiego, co z tym się wiąże, a przede wszystkim rozwiązanie jej podstawowych zagadnień: zasadnicze twierdzenie algebry i rozwiązalność równań przez pierwiastniki, aż do stworzenia pojęć abstrakcyjnych, intensywny rozwój analizy zespolonej, równań różniczkowych, analizy Fouriera. Dominować jednak będzie nowa, prężnie rozwijająca się teoria: teoria funkcji eliptycznych, rozszerzona później do teorii funkcji hipereliptycznych. Niewątpliwie jednak analiza zdominuje pierwszą połowę XIX wieku.

Matematyka w omawianym okresie przeszła metamorfozę od niezbyt wyszukanej i mało precyzyjnej matematyki epoki Eulera do niemal nowoczesnej nauki, wzbogaconej o ważne odkrycia i bujnie rozwijające się nowe teorie. Druga połowa XIX wieku przyniosła jeszcze większy poziom ścisłości. Nie bez powodu wiek XIX nazywany jest przez historyków matematyki *wiekiem krytycyzmu*.

Warto w końcu ostatecznie rozstrzygnąć, co na prawdę wniósł Wroński do matematyki. Nie należy jednak ulegać emocjom, ale obiektywnie ocenić jego dorobek i zastanowić się, czy wpłynął on na rozwój matematyki, czy też był tylko incydentem bez większego znaczenia dla historii matematyki.


HOENE-WROŃSKI

WSTĘP
DO
FILOZOFII MATEMATYKI
ORAZ
TECHNIA ALGORYTMII

PRZEŁOŻYŁ Z FRANCUSKIEGO
PAULIN CHOMICZ

PRACE TOWARZYSTWA HOENE—WROŃSKIEGO

WARSZAWA 1937
INSTYTUT WYDAWNICZY „BIBLIOTEKA POLSKA"

Strona tytułowa polskiego przekładu dzieł Wrońskiego ([12], tom I)

Bibliografia:

[1] Niels Henrik Abel, *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichung von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 1 (1826), 65-84.
[2] , *Mémoire sur une classe particuliere d'équations résoluble algébriquement, ibidem* 4 (1829), 131-156.
[3] Florian Cajori, *A history of mathematics*, New York 1893. [reprint: Chelsea 1991].
[4] Augustin-Louis Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, wyd. I, t. I – IV, 1826-1829. wyd. II, t. I – IV, 1840-1847.
[5] Arthur Cayley, *On Wronski's theorem*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 12 (1873), 221–228. [The Collected mathematical Papers of Arthur Cayley, vol. IX, No 574, 96–102].
[6] Samuel Dickstein, *Hoene Wroński. Jego życie i prace*. W Krakowie. Nakładem Akademii Umiejętności. 1896.
[7] Leonhard Euler, *De resolutione aequationum cuiusvis gradus*, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1762/62), [1764], 70-98. [Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series I. Opera Mathematica. Volumen VI. Commentationes algebraicae ad theoriam aequationum pertinentes. Lipisae et Berolini. MCMXXI, 170-196]
[8] P.-H. Fuss, *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIII*^{ème} *Siècle* Précédée d'une Notice sur les Travaux de Léonard Euler, Tome I-II, St.-Pétersbourg, 1843.
[9] Joseph Diaz Gergonne, *Doutes et réflexions, sur la méthode proposée par M. Wronski, pour la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés*, Annales de Mathématiques Pures et Appliquées (Gergonne Annales) 3 (1812-13), 51-59.
[10] — , *Remarque sur la résolution des équations du quatrième degré par la méthode de M. Wronski, ibidem* 3 (1812-13), 137-139.
[11] Józef-Maria Hoene-Wroński, *Résolution générale des équations de tous les degrés*, PARIS, J. KLOSTERMANN fils, Libraire de l'École Impériale Polytechnique, M. DCCC. XII.
[12] — , *Oeuvres Mathématiques de Hoëne Wronski*, tomy 1-4, Hermann, Paris 1925.
[13] Hoene-Wroński, *Wstęp do Filozofii Matematyki oraz Technia Algorytmii*, przełożył z francuskiego Paulin Chomicz, Prace Towarzystwa Hoene-Wrońskiego, Warszawa 1937.
[14] — , Rękopisy, Biblioteka Kórnicka (sygnatury: BK 2234-2256).
[15] *Matematyka czasów Gaussa*. XIV Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki. Redakcja naukowa: Włodzimierz Odyniec, Witold Więsław. Zielona Góra 2001.
[16] James Pierpont, *The history of mathematics in the nineteenth century*, Bulletin of the American Mathematical Society 11 (1904), 136-159.
[17] Paolo Ruffini, *Intorno al methodo generale proposto dal signor Hoëné Wronski ondre risolvere le equazioni di tutti i gradi. Memoria del signor Paolo Ruffini*, Dalle Memoria di Matematica e di Fisica Societa Italiana delle Scienze Tomo XVIII, Parte contenante le Memoria di Matematica (Modena 1820), 271-279.
[18] Witold Więsław, *Matematyka i jej historia*, Wydawnictwo NOWIK, Opole 1997.
[19] — , *Początki grup abelowych* (w tomie: ***Matematyka abelowa - w dwóchsetlecie urodzin Nielsa Henrika Abela*** **(1802-1829)**, XVII Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Nowy Sącz 9-13 czerwca 2003. Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Więsława, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Nowy Sącz 2004), 55-60.
[20] — , *Twierdzenie Ruffiniego-Abela* (w tomie: ***Matematyka abelowa - w dwóchsetlecie urodzin Nielsa Henrika Abela*** **(1802-1829)**, XVII Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Nowy Sącz 9-13 czerwca 2003, Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Więsława, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Nowy Sącz 2004), 49-54.

[21] — , *Matematyka wileńska za czasów Adama Mickiewicza. Archiwalia*, Wiadomości Matematyczne 42 (2006), 143-166.
[22] — , *Matematyka polska epoki Oświecenia* (w druku).

Witold Więsław
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
e-mail: witold.wieslaw@math.uni.wroc.pl